

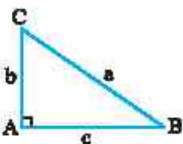


مثلات

فصل ۹

قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



۱۰۱۶* در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $\tan B = \sqrt{2}$ و $a = 2\sqrt{3}$ می‌باشد. اندازه ضلع c کدام است؟

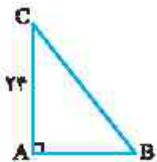
- ۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) 2 ۴) 3

۱۰۱۷* در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\sin B = \frac{15}{17}$ است. مقدار $\cos B + \sin C$ برابر کدام است؟

- ۱) 1 ۲) $\frac{16}{17}$ ۳) $\frac{18}{17}$ ۴) $\frac{19}{17}$

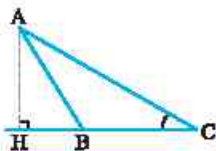
۱۰۱۸ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، اگر $a = \sqrt{3}$ و $c = \sqrt{5}$ باشد، حاصل $\sin^2 A + \cot^2 A$ کدام است؟

- ۱) $\frac{29}{24}$ ۲) $\frac{65}{24}$ ۳) $\frac{49}{40}$ ۴) $\frac{29}{40}$



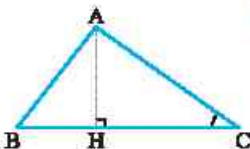
۱۰۱۹* در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $AC = 24$ و $\cos C = \frac{4}{5}$ است. محیط مثلث ABC کدام است؟

- ۱) 58 ۲) 64 ۳) 72 ۴) 80



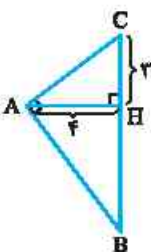
۱۰۲۰ در شکل مقابل، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه ارتفاع AH کدام است؟ (مسئله ریاضی-۹۹)

- ۱) $\frac{215}{26}$ ۲) $\frac{215}{4}$ ۳) $\frac{2175}{4}$ ۴) $\frac{2175}{2}$



۱۰۲۱ در شکل مقابل، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه ارتفاع AH کدام است؟ (مسئله ریاضی خارج کشور-۹۹)

- ۱) 48 ۲) 56 ۳) 64 ۴) 72



۱۰۲۲ در شکل مقابل، مقدار کسینوس زاویه B کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۱۰۲۳* در مثلث ABC ، $a = 9$ ، $b = 6$ و $c = 2\sqrt{3}$ است. مقدار $\cos C$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{4}{5}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

۱۰۲۴* مقدار عددی عبارت $(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۱۰۲۵ مقدار x از رابطه $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \tan x$ کدام است؟

- ۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 120°

۱۰۲۶★ حاصل عبارت $(x+y)^2 \sin^2 30^\circ - (x-y)^2 \cos^2 60^\circ$ کدام است؟

- ۱) $2xy$ ۲) xy ۳) $2(x^2 + y^2)$ ۴) $2(x^2 - y^2)$

۱۰۲۷ اگر x زاویه حاده و $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، حاصل $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} + \tan(\frac{x}{2})$ برابر کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۰۲۸★ اگر x و y دو زاویه حاده، $\tan(x+y) = 1$ و $\cos(y - \frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشند، $2x - y$ کدام است؟

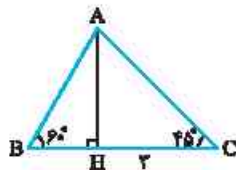
- ۱) 60° ۲) 90° ۳) 105° ۴) 15°

۱۰۲۹ اگر x و y زوایای حاده و $\sin(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos(\frac{2x}{3} - \frac{y}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، حاصل $\sin(x+15^\circ) + \cos 2y$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) 2

۱۰۳۰★ در مثلث شکل مقابل، اندازه ضلع BH چقدر است؟

- ۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) 2



۱۰۳۱ در مثلث ABC ، $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{C} = 45^\circ$ و $AC = 6\sqrt{2}$ است. طول ضلع AB کدام است؟

- ۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 4 ۴) 2

۱۰۳۲★ در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه ضلع AC کدام است؟

(مسئله ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

- ۱) 3 ۲) 4 ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

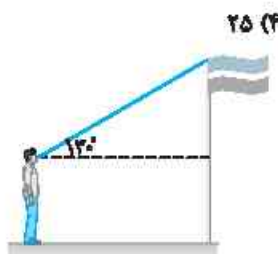
۱۰۳۳★ طول دو قاعده یک نوزنقه متساوی الساقین ۶ و ۱۰ و یک زاویه آن 30° می‌باشد. طول ساق نوزنقه چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) 2

کاربرد مثلثات

۱۰۳۴ یک هواپیما با زاویه 12° از زمین بلند می‌شود. پس از طی تقریباً چند کیلومتر با همین زاویه به ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین می‌رسد؟ ($\sin 12^\circ \approx 0.2$)

- ۱) 10 ۲) 15 ۳) 20 ۴) 25



۱۰۳۵★ شخصی با قد ۱۷۰ سانتی‌متر در ۱۲ متری یک پرچم، مطابق شکل ایستاده است. اگر زاویه بین نوک پرچم و محور افقی که در چشم این شخص تشکیل می‌شود 3° درجه باشد، طول میله پرچم حدوداً چند متر است؟

- ۱) $6/8$ ۲) $7/2$ ۳) $8/1$ ۴) $8/5$

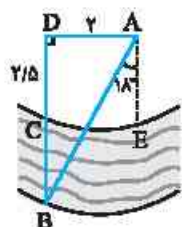
۱۰۳۶ یک بالن مطابق شکل، توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها 30 متر باشد، طول طناب دوم تقریباً چند متر است؟

- ۱) 20 ۲) 21 ۳) 23 ۴) 25



۱۰۳۷★ برای تعیین عرض رودخانه‌ای (شکل مقابل)، دو نقطه B و C را در دو طرف آن و نقطه D را در امتداد BC چنان در نظر می‌گیریم که طول DC برابر $2/5$ متر و نقطه A چنان باشد که طول AD برابر 2 متر بوده و AD بر DC عمود باشد و $\hat{BAE} = 18^\circ$. عرض رودخانه (طول BC) تقریباً چقدر است؟ ($\tan 72^\circ \approx 3$)

- ۱) $3/5$ ۲) 2 ۳) $4/5$ ۴) 4



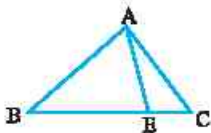
۱۰۳۸★ ناظری به فاصله 35 متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. اگر زاویه رؤیت ابتدا و انتهای مجسمه با سطح افقی به ترتیب برابر 30° و 45° باشد، ارتفاع مجسمه به‌طور تقریبی چند متر است؟ ($\tan 40^\circ \approx 0.8$)

(مسئله ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

- ۱) 6 ۲) $6/4$ ۳) 7 ۴) $7/2$

مسائل

- ۱.۰۳۹* در مثلث ABC ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، $AB = 4$ و $AC = 6$ ، مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟
 ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴
- ۱.۰۴۰ در مثلث ABC ، $\hat{C} = 15^\circ$ ، $\hat{B} = 45^\circ$ ، $AC = \sqrt{3}$ و $AB = 8$ ، مساحت مثلث ABC چند واحد سطح است؟
 ۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) $6\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$
- ۱.۰۴۱ در مثلث قائم الزاویه ABC ، $\hat{B} = 90^\circ$ ، $\tan A = \frac{\sqrt{5}}{4}$ و $b = 6$ ، مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟
 ۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) ۶ ۴) ۸
- ۱.۰۴۲* در مثلث متساوی الساقین ABC ، طول قاعده برابر $BC = 2\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 30^\circ$ است. مساحت مثلث کدام است؟
 ۱) $6\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{3}$
- ۱.۰۴۳* مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟ (سباضی تجربی - ۹۴)
 ۱) $\sqrt{29}$ ۲) $\sqrt{41}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{2}$
- ۱.۰۴۴ مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ واحد مربع است. اگر $AB = 4$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟
 ۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۴
- ۱.۰۴۵ در یک متوازی الاضلاع، طول دو ضلع ۴ و ۶ سانتی متر و یکی از زوایای داخلی آن 150° است. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟
 ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲
- ۱.۰۴۶* متوازی الاضلاعی با طول یک ضلع $6\sqrt{3}$ و اندازه یک زاویه 120° ، مساحتی برابر ۱۸ دارد. طول ضلع دیگر متوازی الاضلاع کدام است؟
 ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱
- ۱.۰۴۷* در متوازی الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویه بین دو قطر 135° است. مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (سباضی تجربی - ۹۴)
 ۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۶
- ۱.۰۴۸ مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع $2\sqrt{3}$ کدام است؟
 ۱) $9\sqrt{3}$ ۲) $18\sqrt{3}$ ۳) $24\sqrt{3}$ ۴) $30\sqrt{3}$
- ۱.۰۴۹* قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم به ضلع $\sqrt{3}$ ، طول ضلع یک شش ضلعی منتظم دیگر است. مساحت این شش ضلعی چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است؟
 ۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷
- ۱.۰۵۰ در شکل مقابل اگر $BE = EC$ باشد، نسبت $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}}$ کدام است؟
 ۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$



قسمت دوم: دایره مثلثاتی و نسبت های مثلثاتی در آن

علامت نسبت های مثلثاتی

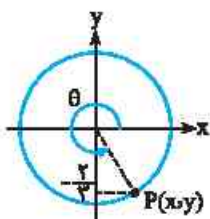
- ۱.۰۵۱* کدام گزینه درست است؟
 ۱) $\sin 190^\circ > 0$ ۲) $\cos(-25^\circ) > 0$ ۳) $\sin(-220^\circ) < 0$ ۴) $\tan 310^\circ > 0$
- ۱.۰۵۲* اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \tan \alpha < 0$ باشد، آن گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟ (سباضی ریاضی)
 ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم
- ۱.۰۵۳* اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟ (سباضی تجربی)
 ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم
- ۱.۰۵۴ اگر $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = 0$ و $\tan x = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می گیرد؟
 ۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول
- ۱.۰۵۵* اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{4}$ و $\cos \theta \cdot \sin \theta > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟
 ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم
- ۱.۰۵۶ اگر $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$ باشد، انتهای کمان مقابل به زاویه θ در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟
 ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

فصل دوم (توان)

تغییرات نسبت‌های مثلثاتی

- ۱.۵۷۶* با زیاد شدن زاویه θ از 90° تا 270° ، نسبت مثلثاتی $\sin \theta$ چگونه تغییر می‌کند؟
 (۱) همواره زیاد می‌شود. (۲) همواره کم می‌شود. (۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. (۴) ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.
- ۱.۵۸۳* با زیاد شدن زاویه θ از 180° تا 360° ، نسبت مثلثاتی $\cos \theta$ چگونه تغییر می‌کند؟
 (۱) همواره زیاد می‌شود. (۲) همواره کم می‌شود. (۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. (۴) ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.
- ۱.۵۹۳* کدام نامساوی زیر درست است؟
 (۱) $\sin 40^\circ > \sin 50^\circ$ (۲) $\sin 120^\circ > \sin 150^\circ$ (۳) $\sin 210^\circ < \sin 240^\circ$ (۴) $\sin 270^\circ > \sin 90^\circ$
- ۱.۶۰۳* کدام گزینه درست است؟
 (۱) $\sin 20^\circ > \cos 50^\circ$ (۲) $\sin 30^\circ > \sin 50^\circ$ (۳) $\cos 40^\circ > \sin 70^\circ$ (۴) $\cos 10^\circ > \sin 50^\circ$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (۲)$$

$$\cot \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۳)$$

$$\cos \theta = -\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\tan \theta = -\frac{2}{5} \quad (۳)$$

- ۱.۶۲۳* نقطه P به طول $\frac{2}{5}$ روی دایره مثلثاتی و در ناحیه دوم قرار دارد. اگر θ زاویه بین نیم‌خط \vec{OP} با محور \vec{Ox} باشد، $\tan \theta$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{4}$ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

- ۱.۶۳* نقطه‌ای به عرض $-\frac{5}{13}$ روی دایره مثلثاتی و در ناحیه سوم قرار دارد. مقدار $\cot \theta$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{8}$ (۴) ۳

- ۱.۶۴* نقطه $(-a, b-a)$ روی دایره مثلثاتی واقع در ناحیه دوم قرار دارد. اگر $-9 = -25 \cos^2 \theta$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{5}$

- ۱.۶۵* اگر $1 - 2m \leq \sin x \leq 1 - 2m$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

- (۱) $0 \leq m \leq 1$ (۲) $-2 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $-2 \leq m \leq 2$

- ۱.۶۶* اگر $30^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ و $\sin \theta = m + 1$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} < m \leq 1$ (۲) $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$ (۳) $-1 \leq m \leq 0$ (۴) $0 \leq m < \frac{1}{2}$

- ۱.۶۷* اگر $180^\circ < \theta < 270^\circ$ و $\cos \theta = \frac{2m-1}{2}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $-1 < m < 1$ (۲) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ (۳) $-1 < m < \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2} < m < 1$

- ۱.۶۸* اگر $20^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{2m-1}{2}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $-1 \leq m \leq 1$ (۲) $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$ (۳) $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ (۴) $-2 \leq m \leq \frac{2}{4}$

- ۱.۶۹* حاصل $|1 - \cos x| + |2 \cos x - 3|$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cos x - 2$ (۲) $2 - \cos x$ (۳) $4 - 2 \cos x$ (۴) $2 \cos x - 4$

- ۱.۷۰* عبارت $A = 2 - 2 \sin \theta$ به کدام بازه تعلق دارد؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-1, 4]$ (۳) $[1, 5]$ (۴) $[0, 6]$

- ۱.۷۱* اگر بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت $2 \cos x - 5$ به ترتیب A و B باشد، $A^2 + B$ کدام است؟

- (۱) -8 (۲) -6 (۳) 48 (۴) 54

- ۱.۷۲* کم‌ترین مقدار عبارت $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) صفر (۳) $-\frac{3}{8}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

- ۱.۷۳* بیش‌ترین مقدار عبارت $A = 2 \cos^2 x - 7 \sin x + 3$ ، از کم‌ترین مقدار آن چقدر بیش‌تر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۱۰۷۲* کمترین مقدار عبارت $2\cos^2 x - \cos x + 1$ کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{8}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۷۵* اگر $-\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد، مقادیر m در کدام فاصله است؟

- ۱) $[1, 2]$ ۲) $[0, 2]$ ۳) $[2, 3]$ ۴) $[2, 4]$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۱۰۷۶* زاویه $\frac{7\pi}{9}$ رادیان چند درجه است؟

- ۱) 25° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 50°

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۷۷* زاویه $37/5^\circ$ چند رادیان است؟

- ۱) $\frac{2\pi}{16}$ ۲) $\frac{5\pi}{24}$ ۳) $\frac{5\pi}{18}$ ۴) $\frac{2\pi}{8}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۷۸* زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۳، ۵ و ۷ متناسب می‌باشند. کوچک‌ترین زاویه مثلث بر حسب رادیان کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{9}$

۱۰۷۹* در چهارضلعی منهدب ABCD، رابطه $\frac{\hat{A}}{8} = \frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{7} = \frac{\hat{D}}{4}$ بین اندازه زاویه‌های داخلی آن برقرار است. اندازه زاویه C بر حسب رادیان کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{12}$ ۲) $\frac{7\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{9}$

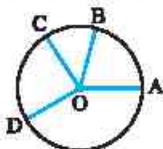
۱۰۸۰* اگر θ زاویه حاده و $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -\frac{1}{4}$ باشد، اندازه زاویه θ بر حسب رادیان کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{12}$

اندازه زاویه مرکزی در دایره بر حسب رادیان

۱۰۸۱* در شکل مقابل، O مرکز دایره و طول کمان AB برابر r (شعاع دایره) می‌باشد. اگر $\widehat{BC} = \frac{2}{3}\widehat{AB}$ و $\widehat{CD} = \frac{5}{4}\widehat{CB}$ باشد، اندازه

(برگرفته از کتاب درسی)



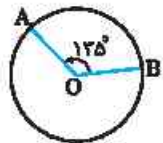
زاویه AOD (روبرو به کمان ABD) چند رادیان است؟

- ۱) $\frac{29}{8}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{27}{8}$ ۴) $\frac{22}{8}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۸۲* در دایره‌ای به شعاع ۶۰ سانتی‌متر، اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول یک متر، چند رادیان است؟

- ۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$



۱۰۸۳* با توجه به شکل مقابل، اگر طول کمان AB برابر 2π باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

- ۱) 16π ۲) 9π ۳) $\frac{9}{16}\pi$ ۴) $\frac{16}{9}\pi$

۱۰۸۴* اگر روی دایره‌ای به شعاع ۵ کیلومتر، مسافت $\frac{25\pi}{3}$ کیلومتر طی شود، زاویه دوران بر حسب درجه کدام است؟

- ۱) ۳۳۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۷۵ ۴) ۳۰۰

۱۰۸۵* چه مدت طول می‌کشد که عقربه دقیقه‌شمار به اندازه $\frac{7\pi}{5}$ رادیان دوران کند؟

- ۱) ۵۴ دقیقه ۲) ۵۰ دقیقه ۳) ۴۸ دقیقه ۴) ۴۲ دقیقه

۱۰۸۶* ابتدا نقطه A (۱۰۰) روی دایره مثلثاتی را به اندازه 140° دوران می‌دهیم تا به نقطه B برسیم و سپس نقطه B را به اندازه $\frac{1}{4}$ دور کامل در

جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا به نقطه C برسند. طول کمان BC کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{18}$

مسئله‌های تستی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرزی

۱۰۸۷★ حاصل عبارت $\sin^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ - \sqrt{3} \tan 60^\circ + 2 \cot 45^\circ - \sin^2 27^\circ$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۰۸۸★ حاصل $\frac{\sin 27^\circ + \cos 18^\circ - \tan 18^\circ}{\sin 9^\circ + \cos 9^\circ - \cot 27^\circ}$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) 1 ۳) صفر ۴) 2

۱۰۸۹★ اگر $2 \sin 2\alpha - 2 \cos 2\beta = 5$ و α و β زاویه‌های حاده باشند، حاصل $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۱۰۹۰★ اگر $\frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} = 2$ و $0 \leq x \leq 180^\circ$ باشد، حاصل $\sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ + 2x) + \cos^2 x$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) 1 ۳) -2 ۴) -1

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص بر حسب رادیان

۱۰۹۱★ مقدار عددی عبارت $\cos \frac{2\pi}{3} - \tan 2\pi + \frac{2}{\sqrt{3}} \cot \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) $\frac{4}{3}$

۱۰۹۲★ حاصل کسر $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}{\tan^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{7}{9}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۹۳★ حاصل عبارت $\tan \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} + \sin^2 \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) 3 ۴) 4

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۹۴★ مقدار عددی عبارت $\cos^2 \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \cot \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱) 2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) صفر

۱۰۹۵★ اگر $\sin \theta = 1$ و $\theta \in [0, 2\pi]$ باشد، مقدار عددی $\cos 2\theta + \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} + \sin 3\theta$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 1

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه

$\sin \frac{7\pi}{9} < 0$ ، $\cos \frac{8\pi}{5} < 0$ ، $\tan \frac{11\pi}{9} < 0$ ، $\cot \frac{13\pi}{8} > 0$.

- ۱) 2 ۲) 3

۱۰۹۶★ چند تا از نامساوی‌های روبه‌رو صحیح است؟

- ۱) صفر ۲) 1

۱۰۹۷★ کدام‌یک از عبارت‌های زیر، عددی منفی است؟

- ۱) $\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}$ ۲) $\sin \frac{2\pi}{5} - \tan \frac{7\pi}{8}$ ۳) $\cos \frac{7\pi}{5} + \cot \frac{5\pi}{7}$ ۴) $\sin \frac{7\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6}$

شیب خط

۱۰۹۸★ خطی که با قسمت مثبت محور x ها زاویه 45° می‌سازد و از نقطه $(1, 4)$ می‌گذرد، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

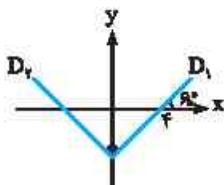
- ۱) -5 ۲) -3 ۳) 5 ۴) 3

۱۰۹۹★ به ازای چه مقداری از a ، خط گذرنده از دو نقطه $\left[\begin{matrix} 2 \\ a \end{matrix} \right]$ و $\left[\begin{matrix} 1 \\ a+7 \end{matrix} \right]$ با جهت مثبت محور x ها، زاویه 45° می‌سازد؟

- ۱) 2 ۲) 5 ۳) 7 ۴) 4

۱۱۰۰ در شکل مقابل، خط $D_1 D_2$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱) -12 ۲) $-3\sqrt{3}$ ۳) -1 ۴) $-4\sqrt{3}$



(سراسری تیزری - ۹۶)

۱۲۷۷☆ اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۷۸☆ اگر $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۷۹☆ اگر $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل کسر $\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x}$ کدام است؟ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

- (۱) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ (۲) $-\frac{7\sqrt{2}}{8}$ (۳) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ (۴) $-\frac{7\sqrt{2}}{4}$

قسمت هشتم: معادلات مثلثاتی

حل معادله مثلثاتی $\sin u = a$

(سراسری تیزری)

۱۲۸۰☆ یکی از جواب‌های معادله $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{7\pi}{6}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۱۲۸۱☆ جواب‌های کلی معادله $0 = 1 - \cos(\frac{2\pi}{3} - x) + 2\sin x + \delta \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{1\pi}{6}$ است. مجموعه مقادیر δ کدام‌اند؟

- (۱) $\{1, 5\}$ (۲) $\{1, 7\}$ (۳) $\{5\}$ (۴) $\{1, 5, 7\}$

(سراسری تیزری شاره از کشور - ۹۹)

۱۲۸۲☆ تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $1 = \cos(2x)\sin(2x)$ ، در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(سراسری تیزری - ۹۸)

۱۲۸۳☆ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $1 = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)\sin x$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 2π (۳) 4π (۴) 5π

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۲۸۴☆ نمودار تابع $y = \sin 2x$ ، خط $y = -\frac{1}{2}$ را در بازه $[0, \pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(سراسری تیزری - ۹۰)

۱۲۸۵☆ جواب کلی معادله $0 = 1 + \sin(\pi - x) - 2\sin(\frac{\pi}{3} + x)\cos(\pi + x)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تیزری - ۸۷)

۱۲۸۶☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $0 = \sin(\frac{5\pi}{6} + x)\sin(\frac{\pi}{3} + x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

۱۲۸۷☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $1 = \cot(\frac{\pi}{3} + x)\cot(2x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(سراسری تیزری شاره از کشور - ۸۷)

۱۲۸۸☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $1 = \cos^2 x \tan x$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۲۸۹☆ یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $0 = \cos 2x + \sin x - 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

۱۲۹۰☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1}{2} = \sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۲۹۱. جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟ (سراسری تیزر - ۹۹)

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

۱۲۹۲. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 5x + \sin 3x = 1 + \cos \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تیزر خارج از کشور - ۹۶)

- (۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π

۱۲۹۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تیزر خارج از کشور - ۹۷)

- (۱) $\frac{13\pi}{2}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

۱۲۹۴. چند مثلث با مساحت $4\sqrt{3}$ و اندازه دو ضلع ۴ و ۶ وجود دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۹۵. نمودار تابع $y = 1 - 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد و مجموع طول این نقاط کدام است؟

- (۱) ۳، $\frac{22\pi}{12}$ (۲) ۲، $\frac{11\pi}{6}$ (۳) ۲، $\frac{2\pi}{2}$ (۴) ۳، $\frac{3\pi}{2}$

۱۲۹۶. تابع $y = -3\sin(\frac{2\pi}{3}x)$ در بازه $[0, 5]$ در نقطه‌ای با کدام طول، کم‌ترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۲۹۷. نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟ (سراسری تیزر خارج از کشور - ۹۱)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۲۹۸. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{4}$

۱۲۹۹. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۸)

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 2π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 4π

حل معادله مثلثاتی $\cos u = a$

۱۳۰۰. جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $3\cos x(\cos x - 2) = -3$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$) (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۰۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x = 3\cos x$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$) (سراسری تیزر - ۸۷)

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۳۰۲. نمودار تابع $y = x + 2\cos 2x$ ، خط $y = x + 1$ را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{8}$

۱۳۰۳. نمودار تابع $f(x) = 2\cos((2x - 1)\pi)$ در بازه $(-1, 1)$ ، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۰۴. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۳۰۵. در معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) لوزنجه (۴) مستطیل (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱۳۰۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{2\pi}{3} + x) + 3\cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$) (سراسری تیزر - ۸۷)

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

فصل سوم (ادامت)

(سراسری تیزری شایع از کشور - ۹۰)

۱۳۰۷۳* جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan(\frac{7\pi}{4} - x) = \cos \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۳۰۸* جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 \frac{\Delta\pi}{9} = \sin(\frac{\pi}{4} + x)\cos(-x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تیزری)

۱۳۰۹ جواب کلی معادله مثلثاتی $(1 + \tan^2 x)\cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تیزری - ۹۵)

۱۳۱۰* جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x + 2\cos x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\Delta\pi}{9}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری تیزری - ۹۷)

۱۳۱۱* جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(سراسری تیزری شایع از کشور - ۹۴ و ۹۸)

۱۳۱۲* جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تیزری - ۹۱)

۱۳۱۳* جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{7\pi}{4} + x)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{2}$ (۲) (۱) $\frac{k\pi}{2}$

(سراسری تیزری - ۹۶)

۱۳۱۴* جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{\Delta\pi}{9}$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۳۱۵* جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x - \Delta\cos x + 4 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۴) $2k\pi$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۳۱۶ معادله $\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۴) ۶ (۲) ۵ (۲) ۴ (۲) (۱) ۳

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۳۱۷ مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x - \sin x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۴) $-\frac{\Delta\pi}{8}$ (۲) $-\frac{2\pi}{8}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۲) (۱) $-\frac{\pi}{8}$

۱۳۱۸ مجموع جواب‌های معادله $2\sin 2x + \sin 2x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, 2\pi)$ کدام است؟

- (۴) $\Delta\pi$ (۲) 4π (۲) 2π (۲) (۱) 2π

۱۳۱۹ معادله $1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۴) ۴ (۲) ۳ (۲) ۲ (۲) (۱) ۱

۱۳۲۰ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۴) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\pi$ (۲) π (۲) (۱) $\frac{\pi}{2}$

(سراسری تیزری - ۹۱)

۱۳۲۱* نمودار تابع $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 2\pi x)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

- (۴) ۴ (۲) ۲ (۲) ۲ (۲) (۱) ۱

۱۳۲۲* نمودار تابع $y = \Delta\cos(\frac{7\pi}{4} - \pi x) + 1$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه کم‌ترین مقدار را دارد؟

- (۴) ۱ (۲) ۲ (۲) ۳ (۲) (۱) ۴

۱۳۲۳* نمودار تابع $y = -2 \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟
 ۲ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۱۳۲۴* جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (2 \sin x + \tan x)$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۶)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۲۵* در معادله مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ ، مجموع تمام جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟
 (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$

۱۳۲۶* نقاط پایانی گمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟
 (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

۱۳۲۷* جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 2x + \sin 4x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۱۳۲۸* یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \sqrt{2}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $2k\pi + \frac{7\pi}{3}$

۱۳۲۹* جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 2x}{\cos(\frac{7\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری تجربی - ۹۳)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

حل معادله مثلثاتی $\tan u = a$

۱۳۳۰* جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 2x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری تجربی - ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{2\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

۱۳۳۱* جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری تجربی)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۳۳۲* جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos x(\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۳۳۳* جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری تجربی - ۹۴)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۳۳۴* جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری ریاضی - ۸۷)

۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۱۳۳۵* جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$
 (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۳۳۶* اگر $\tan x + \cot x = k - 1$ ، آن‌گاه حدود k برای آن‌که معادله جواب داشته باشد کدام است؟

۱) $-1 < k < 2$ (۲) $k \geq 2$ یا $k \leq -1$ (۳) $k > 2$ (۴) $k < -\frac{1}{2}$

۱۳۳۷* مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2\sqrt{3}$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) 2π (۳) $\frac{7\pi}{3}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

مجموعه سوالات

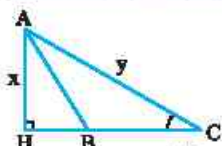


مثلثات

۹

پاسخ فصل

۱۰۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹



طول ضلع AH را برابر x و طول ضلع AC را برابر y در نظر می‌گیریم:

$$\sin C = \frac{\Delta}{13} = \frac{AH}{AC} = \frac{x}{y} = \frac{5k}{13k}$$

$$\Delta AHC: AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow (\Delta k)^2 + 81 = (13k)^2$$

$$\Rightarrow 169k^2 - 25k^2 = 81 \Rightarrow 144k^2 = 81 \Rightarrow k^2 = \frac{81}{144}$$

$$\Rightarrow k = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \Delta k = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

۱۰۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

در مثلث قائم‌الزاویه AHC (با توجه به شکل صورت سؤال)، داریم:

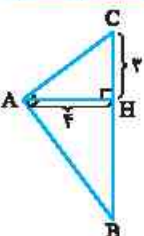
$$\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}k}{2k} \Rightarrow CH = \sqrt{5}k, AH = 2k$$

$$\Delta AHC: AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow 96^2 = \Delta k^2 + 4k^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow 96 \times 96 = 4k^2 \Rightarrow k^2 = 23^2 \Rightarrow k = 23$$

$$\Rightarrow AH = 2k = 46$$

۱۰۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

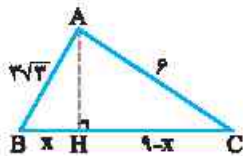


$$\Delta AHC: AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), دو زاویه B و C متتام یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$\cos B = \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{4}{5}$$

۱۰۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹



مثلث ABC قائم‌الزاویه نیست (تساوی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار نیست) پس با رسم یک ارتفاع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای بوجود می‌آوریم. با رسم ارتفاع AH در مثلث قائم‌الزاویه AHC ، داریم:

$$\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{9-x}{p}$$

برای به‌دست آوردن مقدر x از قضیه فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$\Delta AHC: AH^2 = AC^2 - CH^2, \Delta AHB: AH^2 = AB^2 - BH^2$$

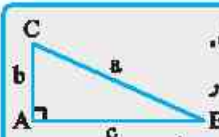
$$\Rightarrow AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow p^2 - (9-x)^2 = (3\sqrt{3})^2 - x^2$$

$$\Rightarrow 26 - (81 - 18x + x^2) = 27 - x^2$$

$$\Rightarrow -45 + 18x - x^2 = 27 - x^2 \Rightarrow 18x = 45 + 27 = 72$$

$$\Rightarrow x = \frac{72}{18} = 4 \Rightarrow \cos C = \frac{9-x}{p} = \frac{9-4}{p} = \frac{5}{p}$$

۱۰۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

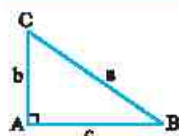


نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$),

نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده B به‌صورت زیر

تعریف می‌شوند:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, \tan B = \frac{b}{c}, \cot B = \frac{c}{b}$$



در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), داریم:

$$\tan B = \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c, a = 2\sqrt{2}$$

$$\text{رابطه فیثاغورس: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2$$

$$\Rightarrow 27 = 2c^2 + c^2 \Rightarrow 3c^2 = 27 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

۱۰۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

با توجه به شکل، مقدر $\sin B$ با مقدار $\frac{AC}{BC}$ برابر است. بنابراین:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$$

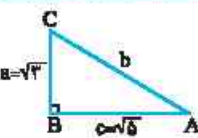
برای حل تست، می‌توان $AC = 15$ و $BC = 17$ در نظر گرفت. بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 17^2 - 15^2 = (17-15)(17+15)$$

$$= 2 \times 32 = 64 \Rightarrow AB = 8$$

$$\Rightarrow \cos B + \sin C = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} = \frac{2AB}{BC} = \frac{2 \times 8}{17} = \frac{16}{17}$$

۱۰۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹



بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$b^2 = a^2 + c^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 = 3 + 5 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8}$$

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل وتر}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور طول ضلع مقابل}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2 A + \cot^2 A = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{8} + \frac{5}{3} = \frac{9+40}{24} = \frac{49}{24}$$

۱۰۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

$$\cos C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{24}{BC} \Rightarrow BC = \frac{24 \times 5}{4} = 30$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 30^2 = AB^2 + 24^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 900 - 576 = 324 \Rightarrow AB = 18$$

$$\text{محیط مثلث} = AC + AB + BC = 24 + 18 + 30 = 72$$



تست‌های کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۸۳۲. فرض کنید $a = \sqrt{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $2(2 + \sqrt{3})$ ۲) $2(2 - \sqrt{3})$ ۳) $16(2 + \sqrt{3})$ ۴) $16(2 - \sqrt{3})$

۲۸۳۵. فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(\sqrt{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} + 1)(\sqrt{x^2} - 1) = 2\sqrt{x}$ باشند. مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۲۸۳۶. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ باشند. ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $125x^2 + 16x = 1$ ۲) $125x^2 = 16x + 1$ ۳) $125x^2 = 12x + 1$ ۴) $125x^2 + 12x = 1$

۲۸۳۷. اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ باشد. مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $\frac{6 - 2\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6 - \sqrt{2}}{16}$ ۳) $\frac{6 + \sqrt{2}}{16}$ ۴) $\frac{6 + 2\sqrt{3}}{16}$

۲۸۳۸. اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{2}{p}$ باشد. مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

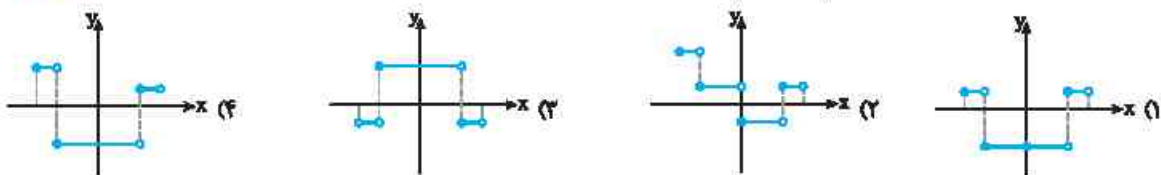
۲۸۳۹. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(2x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 5 ۴) 6

۲۸۴۰. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_p(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ۲) $(-1, 2)$ ۳) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ۴) $(-2, 1)$

۲۸۴۱. نمودار تابع $y = 2||[3x]| - 1|$ به ازای $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)



۲۸۴۲. فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $xy = x^2$ و $xy = y^2$ با مبدأ مختصات، کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$

۲۸۴۳. اگر $\frac{4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3} + 4^{x+4} + 4^{x+5}}{4^{x-2} + 4^{x-1} + 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3}} = 52$ باشد. مقدار x کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۲۸۴۴. نمودار تابع $y = 2|\sin x|$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

۲۸۴۵. اگر تساوی $\log_x y - 2 \log_y x = 1$ به ازای $x > y > 1$ برقرار باشد. کدام تساوی درست است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۱) $y = x^2$ ۲) $y = x^{\sqrt{2}}$ ۳) $y = \sqrt{x}$ ۴) $xy = 2$

(سراسری - ۱۴۰۰)

۲۸۴۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

(سراسری - ۱۴۰۰)

۲۸۴۷. مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{p}} [y \sin x - 1]$ کدام است؟ ([] نماد جز صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۲۸۴۸. قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) ۳ (۲) -۲ (۳) -۲ (۴) -۴

(سراسری - ۱۴۰۰)

۲۸۴۹. فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(سراسری - ۱۴۰۰)

۲۸۵۰. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} |x^2-2|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۸۵۱. قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' کدام است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۲۸۵۲. فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{3}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ، چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) -۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۸۵۳. فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ و $(a \neq 0)$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b + c = a$ کدام است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۸۵۴. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) 32π (۲) 64π (۳) $\frac{256\pi}{3}$ (۴) $\frac{512\pi}{3}$

۲۸۵۵. احتمال این‌که یک دانش آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد $\frac{9}{10}$ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد $\frac{85}{100}$ است. اگر دانش آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این‌که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{8}{9}$ (۲) $\frac{85}{94}$ (۳) $\frac{17}{18}$ (۴) $\frac{45}{47}$

۲۸۵۶. فرض کنید $\{a, b, c\} \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد، به طوری‌که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیش‌تر باشد؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۲۸۵۷. در یک جلسه آموزشی، میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در سندلی‌ها بنشینند، به طوری‌که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۸۸ (۳) ۲۷۶ (۴) ۱۱۵۲

۲۸۵۸. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد، یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

(سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{13}{21}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۸۵۹. شیب نیم‌خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم، که نقطه B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-2, -1)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- ۲۴ (۱) 18 (۲) $6\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴)

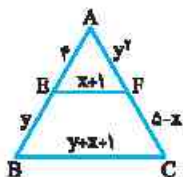
۲۸۶۰. نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A ، کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

- (۱) $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$

۲۸۶۱. دایره‌های $x^2 + y^2 + 2x = 3$ و $x^2 + y^2 + 2y = 3$ متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)

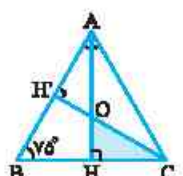
- (۱) $x = y$ (۲) $x = 1 + y$ (۳) $x = -y$ (۴) $x = 1 - y$

۲۸۶۲. در شکل مقابل EF موازی BC است. مقدار $2x - y$ ، کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)



- (۱) -4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 4

۲۸۶۳. در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC ، کدام است؟ (سراسری - ۱۴۰۰)



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{18}{7+3\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{9}{7+3\sqrt{2}}$

۲۸۶۴. فرض کنید $a = \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ ، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) 9 (۲) 16 (۳) 25 (۴) 29

۲۸۶۵. مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل ضرب پول‌های باقی‌مانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) 9 (۲) 15 (۳) 85 (۴) 91

۲۸۶۶. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x = x^2 - 2$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^2 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^2 + \frac{1}{x_2}$ است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) $4x^2 = 51x + 221$ (۲) $4x^2 + 51x = 221$ (۳) $4x^2 = 51x + 197$ (۴) $4x^2 + 51x = 197$

۲۸۶۷. اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(3x) \cos^2(4x) \cos^2(5x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ ، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{6+\sqrt{27}}{22}$ (۲) $\frac{6+\sqrt{27}}{16}$ (۳) $\frac{6-\sqrt{27}}{16}$ (۴) $\frac{6-\sqrt{27}}{22}$

۲۸۶۸. فرض کنید زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ ، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{4(2+\sqrt{5})}{3}$ (۲) $\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$ (۳) $\frac{4(-2+\sqrt{5})}{3}$ (۴) $-\frac{4(2+\sqrt{5})}{3}$

۲۸۶۹. تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $5 \sin^2(x) + 2 \cos(3x) = -2$ ، در فاصله $[-\pi, \pi]$ ، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 5 (۴) 7

۲۸۷۰. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_p(|x^2 - 2| - x)$ ، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ (۳) $(-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

۲۸۷۱. تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ را که دوره تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محصور به منحنی f و محور x ها در بازه $[-175, 3125]$ ، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) $3/5$ (۴) 4

۲۸۷۲. فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) 3 (۴) $2\sqrt{2}$

۲۸۷۳. از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر تویی را به زمین یرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه ۰.۸ ارتفاع قبلی از زمین

به‌صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) ۵۴ (۲) ۵۷ (۳) ۶۰ (۴) ۶۶

۲۸۷۴. تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم.

منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

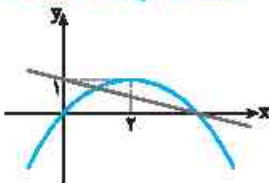
۲۸۷۵. اگر در معادله $2 \log_2 x + \log_2 \sqrt{x} = 2$ مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 3 (۴) 9

۲۸۷۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$ ، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) 1 (۳) صفر (۴) -1

۲۸۷۷. نمودار تابع سهمی I و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + g(x)}{6 - x}$ ، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۲۸۷۸. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

- (۱) -12 (۲) -8 (۳) 8 (۴) 12

۲۸۷۹. فرض کنید $f(x) = x(1-x^2)$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(f \circ g) \circ g$ ، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۲۸۸۰. مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|3-x^2|$ در بازه $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $-\frac{9}{4}$ (۲) -2 (۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{9}{8}$

۲۸۸۱. قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را A'

می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA' ، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$ (۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

۲۸۸۲. فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق چپ تابع $f \circ g$ در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 8

۲۸۸۳. فرض کنید $g(x) = ax^2 + \Delta x + b$ ، اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ ، کدام است؟ (مسابقات خارج از کشور - ۱۳۰۰)

- (۱) $-\frac{15}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{15}{2}$

۲۸۸۲. کوتاه‌ترین فاصله سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(2,0)$ کدام است؟

- (مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰) (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

۲۸۸۵. احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دوره بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰) فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد.

- (۱) $\frac{20}{27}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{7}{10}$ (۴) $\frac{6}{7}$

۲۸۸۶. فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ، چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان نوشت که فاصله حاصل ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۲۸۸۷. به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) ۷۲ (۲) ۱۴۴ (۳) ۴۳۲ (۴) ۲۱۶

۲۸۸۸. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{66}{205}$ (۲) $\frac{67}{205}$ (۳) $\frac{168}{325}$ (۴) $\frac{177}{325}$

۲۸۸۹. سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ ، خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۸۹۰. نقاط B, C و $M(2, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A ، کدام است؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) ۵ (۲) -2 (۳) -5 (۴) -8

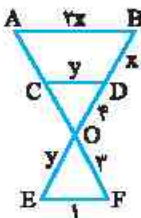
۲۸۹۱. دایره $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله دایره‌ای که با دایره قبلی مماس داخل بوده و از نقطه $(3, -1)$ گذشته و شعاع آن با قطر دایره اصلی برابر باشد، کدام است؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

- (۱) $x^2 + y^2 - 4x = 3$ (۲) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ (۳) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (۴) $x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0$

۲۸۹۲. در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB ، کدام است؟

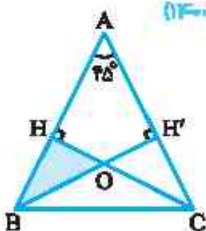
(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)



- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) ۲
(۴) ۳

۲۸۹۳. در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB ، کدام است؟

(مسابقی خارج از کشور - ۱۴۰۰)



- (۱) $\frac{6}{2 + \sqrt{3}}$
(۲) $\frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$
(۳) $\frac{8}{2 + \sqrt{3}}$
(۴) $\frac{12}{2 + 2\sqrt{2}}$



پاسخ تست‌های کنکور سراسری ۱۴۰۰

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos 2(\frac{\pi}{12})}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(\frac{\pi}{12}) = \frac{2}{4} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{16}$$

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

با رسم مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه ۲ و ۴ و با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در آن قرار دارد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را بدست می‌آوریم:



$$\tan \alpha = \frac{2}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{2}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

$$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \cos(-(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times (\frac{2}{2\sqrt{5}}) \times (\frac{4}{2\sqrt{5}}) = \frac{8}{5} \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \pi) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{4}{2\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \times (\frac{16}{20}) - 1}{2 \times \frac{8}{20}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \text{حاصل} = \frac{\frac{8}{5} + \frac{4}{2\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{5} + \frac{4}{2\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5} + 20}{5\sqrt{5}}$$

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

در معادله به جای $\cos^2 x$ عبارت $1 - \sin^2 x$ قرار می‌دهیم:

$$1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \cos(2x) = 1$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x = 0 \Rightarrow -\sin^2 x(1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 1 + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب‌های $x = k\pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، $x = \pi$ ، $x = 0$ ، $x = 2\pi$ می‌باشد.

هم‌چنین جواب‌های $2x = 2k\pi + \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{3\pi}{2}$ می‌باشد.

و $x = \frac{5\pi}{2}$ است. بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ جواب $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، π ، 2π دارد.

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

روشن اول: دامنه تابع با حل نامعادلات زیر بدست می‌آید:

$$x^2 - x - 2 > 0, x^2 - 1 \geq 0, \sqrt{x^2 - 1} + 1 \neq 0$$

$$x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -1 \text{ یا } x > 2 \quad (1)$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول}} |x| \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \quad (2)$$

عبارت $\sqrt{x^2 - 1} + 1$ همواره مثبت است و در نتیجه دامنه تابع با اشتراک جواب‌های (1) و (2) بدست می‌آید: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

ابتدا عبارت داده‌شده را به کمک اتحادها ساده می‌کنیم:

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$$

$$= (((a^2 + b^2) - 2ab) ((a^2 + b^2) + 2ab))^2$$

$$= ((a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2)^2 = (a^4 + b^4 - 2a^2b^2)^2$$

$$\text{حاصل} = ((\sqrt{6} - 2)^2 + (\sqrt{6} + 2)^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2))^2$$

$$= (\sqrt{6} - 2 + \sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} - 4)^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2$$

$$= 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3})$$

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

با تغییر متغیر $\sqrt{x} = A$ ، معادله به صورت $(A^2 + \frac{1}{A^2} + 1)(A^2 - 1) = 2A$ در می‌آید. دو طرف معادله را در A^2 ضرب می‌کنیم. سمت چپ معادله A^2 را در پرانتز اول ضرب می‌کنیم:

$$(A^2 + 1 + A^2)(A^2 - 1) = 2A^2 \Rightarrow A^4 - 1 = 2A^2$$

$$\Rightarrow A^4 - 2A^2 - 1 = 0, A^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 8 \Rightarrow t = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A^2 = t = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = A^2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$A^2 = t = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = A^2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + x - 5 = 0$ هستند. بنابراین:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -5$$

مجموع دو ریشه جدید را بدست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{(x_1 + 1)^2} + \frac{1}{(x_2 + 1)^2} = \frac{(x_2 + 1)^2 + (x_1 + 1)^2}{((x_1 + 1)(x_2 + 1))^2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1 + x_2 + 2)(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(-1 + 2)^2 - 2(-1 + 2)(-5 - 1 + 1)}{(-5 - 1 + 1)^2} = \frac{16}{-125} = -\frac{16}{125} = -\frac{b}{a}$$

در بین گزینه‌ها، فقط در معادله $16x^2 + 16x = 1$ مقدار $-\frac{b}{a}$

برابر $-\frac{16}{125}$ است. توجه کنید در محاسبه $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2$ از

اتحاد $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ استفاده شده است.

۲ ۳ ۴ ۱ ۲۸۲۸

با قرار دادن $\frac{\pi}{12}$ به جای x داریم:

$$f(\frac{\pi}{12}) = 16 \cos^2(\frac{\pi}{12}) \cos^2(\frac{\pi}{6}) \cos^2(\frac{\pi}{4}) \cos^2(\frac{7\pi}{12})$$

$$= 16 \cos^2(\frac{\pi}{12}) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cos^2(\frac{\pi}{12}) \quad (1)$$

برای بدست آوردن مقدار $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ از اتحاد $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

فصل ۹ مثلثات

قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

معادله مثلثاتی: معادلاتی که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم. به عنوان مثال، معادلات

$$2\sin^2 x + \cos 2x = 0 \quad \text{و} \quad \tan x + \cot x = 1$$
 معادله‌های مثلثاتی هستند.

جواب معادله: مقدارهایی از زاویه مجهول که به ازای آن‌ها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادله مثلثاتی پیدا کردن کلیه جواب‌های آن معادله است.

$$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

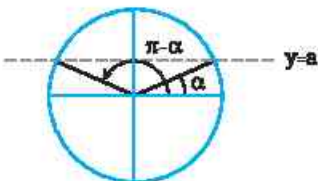
به عنوان مثال، در معادله مثلثاتی $2\cos x = 1$ داریم:

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

جواب‌هایی از معادله‌اند و تمام جواب‌های معادله $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) می‌باشند.

حل معادله مثلثاتی

برای حل یک معادله مثلثاتی، ابتدا به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستوره‌های جبری، آن را به معادله ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = a$ یا $\cot x = a$ تبدیل شود.

حل معادله $\sin x = a$ 

برای حل معادله $\sin x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

نکته: اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

مثال: معادله $\sin 2x + \sin x = 0$ را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sin x = 0$ ، معادله را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ می‌نویسیم:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \sin \left(\frac{2x}{u}\right) = \sin \left(\frac{-x}{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته: اگر معادله مثلثاتی به صورت $\sin u = -\sin \alpha$ باشد، برای حذف منفی، معادله را به صورت $\sin u = \sin(-\alpha)$ می‌نویسیم.

نکته: برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $10, \pm 20, \dots$ را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

تست: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x = \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

(۱) π (۲) $\frac{7\pi}{8}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{11\pi}{8}$

پاسخ: برای آن‌که معادله داده‌شده را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ دربیاوریم، به جای $\cos x$ عبارت $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را قرار می‌دهیم (یا می‌توانیم $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ نیز قرار دهیم). بنابراین داریم:

$$\sin 2x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \xrightarrow{\substack{u=2x \\ \alpha=\frac{\pi}{2}-x}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2k\pi + \pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{4k\pi + 3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در تسلی $x = \frac{2k\pi + \pi}{4}$ ، اگر به جلی k مقادیر صحیح را قرار دهیم، جواب‌های $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$ در بازه $[0, \pi]$ به دست می‌آیند و در معادله $x = \frac{4k\pi + 3\pi}{4}$ ،

فقط به ازای $k = 0$ ، جواب $x = \frac{\pi}{4}$ در بازه $[0, \pi]$ به دست می‌آید. بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = \pi$$

گزینه (۱) صحیح است.

تست: معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ چند جواب دارد؟

۲ (۳)

۶ (۲)

۵ (۲)

۴ (۱)

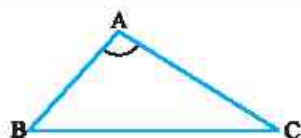
پاسخ: برای حل معادله با استفاده از فاکتورگیری داریم:

$$\sin x(2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})} x = 0, x = \pi \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \xrightarrow{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8k\pi - \pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{8k\pi + 3\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

معادله در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ۶ جواب دارد، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

یادآوری: مساحت مثلث ABC برابر است با:

(برگردانده از کتاب درسی)

تست: چند مثلث وجود دارد که مساحت آن ۶ و طول دو ضلع آن ۴ و ۶ باشند؟

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

صفر (۱)

پاسخ: با فرض $AB = 6$ و $AC = 4$ داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$$

چون A اندازه یک زاویه مثلث است، پس $0^\circ < A < 180^\circ$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \text{ یا } \hat{A} = 150^\circ$$

پس دو مثلث می‌توان رسم کرد، بنابراین گزینه (۳) درست است.

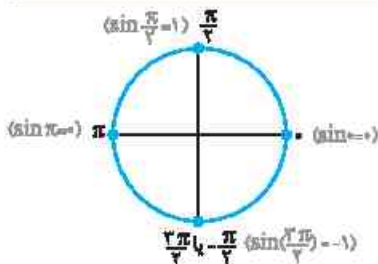
حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد:

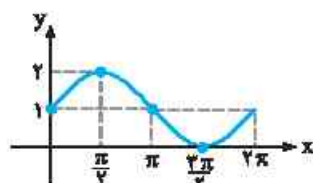
$$\sin u = 0 = \sin 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$\sin u = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

$$\sin u = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$



نکته مهم: ریشه‌های معادلات $\sin u = 1$ و $\sin u = -1$ ، ریشه‌های مضاعف معادله مثلثاتی هستند و بقیه ریشه‌ها، جزء ریشه‌های ساده می‌باشند و در تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی، در دو طرف ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم و در دو طرف ریشه‌های ساده تغییر علامت داریم.



به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x) = 1 + \sin x$ به کمک انتقال در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، $x = \frac{3\pi}{2}$ ریشه مضاعف معادله $f(x) = 0$ است و علامت $f(x)$ در دو طرف

$x = \frac{3\pi}{2}$ مثبت است.

نکته: گاهی اوقات می‌توان جواب‌های معادله مثلثاتی را به دست آورد ولی تعداد جواب‌های معادله را می‌توان تعیین کرد.

تست: معادله $(\sqrt{3}\sin x - 1)(\sqrt{3}\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: $(\sqrt{3}\sin x - 1)(\sqrt{3}\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$ یا $\sqrt{3}\sin x - 5 = 0$ یا $\sin x + 1 = 0$

معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow \sin x = \frac{5}{\sqrt{3}} > 1$ ، معادله دو جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد. $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{2\pi}{3}$ است $\Rightarrow \sin x = -1$

بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای سه ریشه است و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

نکته مهم: برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$

مثال: $\sin^2 x = \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

اگر برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ ، از فرمول گفته شده استفاده نکنیم، باید به صورت زیر حل کنیم:

$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

باید یک بار جوابهای معادله $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و بار دیگر جوابهای معادله $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ را به دست بیاوریم. داریم:

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

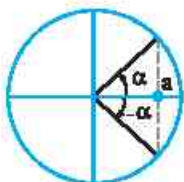
اگر اجتماع ۴ جواب را به دست آوریم، همان $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ خواهد بود.

حل معادله $\cos x = a$

برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید در این صورت تمام جوابهای معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

نکته: جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.



مثال: معادلات زیر را حل کنید و جوابهای کلی آن‌ها را بیابید.

(۱) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ پاسخ: (۱)

(ب) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ (ب) $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

(ب) از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم و معادله داده شده را به صورت یک معادله درجه دوم بر حسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

با انتخاب $A = \cos x$ ، معادله به صورت $2A^2 - 3A + 1 = 0$ درمی‌آید: $2A^2 - 3A + 1 = 0 \Rightarrow (2A - 1)(A - 1) = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ یا $A = 1$

$A = 1 = \cos x = \cos \frac{0}{1} \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ، $A = \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

نکته: برای حل معادله مثلثاتی $\cos u = -\cos \alpha$ ، برای حذف منفی، از رابطه $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ استفاده می‌کنیم و معادله را به صورت $\cos u = \cos(\pi - \alpha)$ می‌نویسیم.

تست: جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳)

$k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۲)

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱)

پاسخ ۱ با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ داریم:

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{7\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{7\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)

۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$

۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

نکته ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm 1$ ، ریشه‌های مضاعف معادلات مثلثاتی هستند.

(ساده‌تر، تمرین خارج از کشور)

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

$(2k+1)\pi$ (۴)

$\frac{k\pi}{2}$ (۳)

$2k\pi$ (۲)

$k\pi$ (۱)

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x \xrightarrow{\text{معادله}} \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \cos x = -1, \cos x = -\frac{c}{a} = -2$

پاسخ ۱

$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

معادله $\cos x = -2$ جواب ندارد و داریم:

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست: تابع $y = 2 \cos(2x) - 1$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ در چند نقطه ماکزیمم دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ ۱ تابع به ازای $\cos 2x = 1$ دارای بیش‌ترین مقدار است:

$\cos 2x = 1 \Rightarrow y = 2(1) - 1 = 1, \cos 2x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) - 1 = -3$

(به ازای $\cos 2x = -1$ تابع کم‌ترین مقدار را دارد)

با حل معادله مثلثاتی $\cos 2x = 1$ ، تعداد x های بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ را مشخص می‌کنیم:

$\cos 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

به ازای $k=0, k=1, k=2$ سه مقدار $x=0, x=\pi, x=2\pi$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ به دست می‌آید و در نتیجه تابع در سه نقطه دارای ماکزیمم است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

$u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$

نکته مهم برای حل معادله مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

مثال: $\cos^2 x = \frac{9}{4} = \left(\frac{\sqrt{9}}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

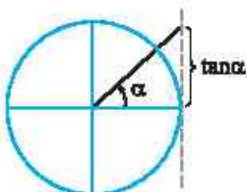
حل معادلات $\cot x = a, \tan x = a$

برای حل معادله $\tan x = a$ و $\cot x = a, a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

برای حل معادله $\cot x = a$ و $\cot \alpha = a, a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$



مثال: معادلات $\tan 2x = \cot x$ و $\tan x + \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

پاسخ: $\tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

برای آنکه معادله $\tan 2x = \cot x$ را به صورت $\tan u = \tan \alpha$ دریاوریم، به جای $\cot x$ عبارت $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را قرار می‌دهیم.

$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \tan 2x = \cot x \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

مثال: معادله $\cot 2x - 1 = 0$ را حل کنید.

پاسخ: $\cot 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cot 2x = 1 = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

حل معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری باید ریشه‌های معرج را از مجموعه جواب حذف کنیم.

(برابری تواری)

تذکره: جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

پاسخ: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)

$\cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲)

باید جواب‌های (۱) را از جواب‌های (۲) حذف کنیم:

$\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\right\} - \left\{\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots\right\} = \left\{k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

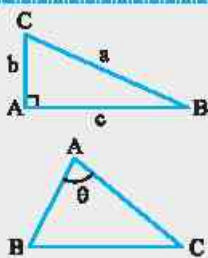
خلاصه مطالب فصل

(۱) مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص در جدول‌های زیر آمده است:

θ	0°	30° یا $\frac{\pi}{6}$	45° یا $\frac{\pi}{4}$	60° یا $\frac{\pi}{3}$	90° یا $\frac{\pi}{2}$	180° یا π	270° یا $\frac{3\pi}{2}$	360° یا 2π
$\sin \theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

(۲) علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع مثلثاتی در جدول زیر آمده است:

نسبت	دوم ربع اول $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$	دوم ربع دوم $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$	دوم ربع سوم $(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2})$	دوم ربع چهارم $(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi)$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



۳) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده B به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \tan B = \frac{b}{c}, \quad \cot B = \frac{c}{b}$$

۴) اگر طول دو ضلع از مثلث و اندازه زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم، مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \theta$$

نکته مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است.

۵) اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه $x^2 + y^2 = 1$ و اگر θ زاویه بین OP و جهت مثبت محور Ox باشد، آن‌گاه:

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

نکته اگر زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:

۶) اگر اندازه زاویه‌ای بر حسب درجه برابر D و بر حسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D = \frac{180R}{\pi}$ و $R = \frac{\pi D}{180}$ ، البته اگر زاویه بر حسب رادیان باشد، می‌توان با قرار دادن 180° به جای π ، اندازه زاویه را بر حسب درجه به دست آورد.

۷) اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی در دایره‌ای به شعاع r باشد (l و r هم‌واحد هستند)، آن‌گاه اندازه زاویه α بر حسب رادیان برابر $\frac{l}{r}$ است.

۸) روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱) به ازای هر عدد حقیقی x ، رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ برقرار است.

$$۲) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$۴) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

۹) روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

$$۱) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$۲) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$۳) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$۴) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$۵) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$۶) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

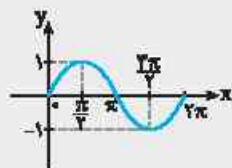
$$۷) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

۱۰) اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\sin(k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha), \quad \cos(k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$$

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha), \quad \cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$$

۱۱) با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل مقابل) نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:



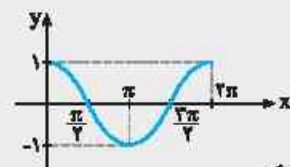
۱) در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تابع صعودی است.

۲) در بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ تابع نزولی است.

۳) در بازه $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ تابع صعودی است.

۴) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر -۱ است.

۱۲) با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل مقابل) نکات زیر را می‌توان نوشت:



۱) در بازه $[0, \pi]$ تابع نزولی است.

۲) در بازه $[\pi, 2\pi]$ تابع صعودی است.

۳) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر -۱ می‌باشد.

۱۳) کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که به ازای آن تساوی $f(x+T) = f(x)$ برقرار باشد دوره تناوب تابع f می‌گویند.

۱۴) دوره تناوب تابع‌های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و دوره تناوب تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

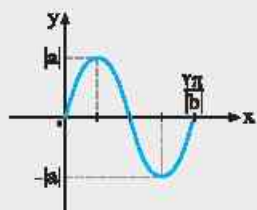
$$T = \frac{1}{n}$$

(۱۵) اگر قطعه‌ای از نمودار با دوره تناوب T ، در بازه‌ای به طول $n \cdot T$ بار تکرار شده باشد، آن‌گاه:

(۱۶) اگر T دوره تناوب تابع f باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n ، تساوی $f(x + nT) = f(x)$ برقرار است.

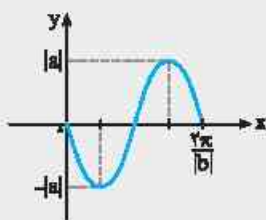
(۱۷) در توابع $y = a \cos(bx) + c$ و $y = a \sin(bx) + c$ داریم: $|a| + c$ = مقدار ماکزیمم مقدار

(۱۸) نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ با فرض $ab > 0$ و در یک دوره تناوب به صورت $[\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{2b}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab > 0$ ، آن‌گاه در بازه $[\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{2b}]$ تابع ابتدا اکیداً صعودی است.

(۱۹) نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ با فرض $ab < 0$ و در یک دوره تناوب به صورت $[\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{2b}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab < 0$ ، آن‌گاه در بازه $[\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{2b}]$ نمودار تابع ابتدا اکیداً نزولی است.

(۲۰) در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$ با فرض منفی بودن a ، داریم:

• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کنند:

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کنند:

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

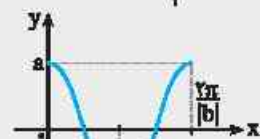
(۲۱) در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$ با فرض مثبت بودن a ، داریم:

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کنند:

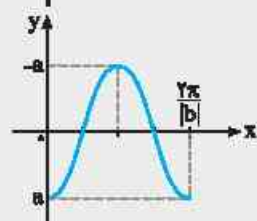
• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کنند:

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



(۲۲) نمودار تابع $y = a \cos(bx)$ با فرض $a > 0$ و در یک دوره تناوب به صورت روبه‌رو می‌باشد:



نمودار تابع $y = a \cos(bx)$ با فرض $a < 0$ و در یک دوره تناوب (بازه) $[\frac{\pi}{2b}, \frac{3\pi}{2b}]$ به صورت روبه‌رو می‌باشد:

(۲۳) دامنه تابع $y = a + b \tan u$ به صورت $\mathbb{R} - \{u = k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$ است.

(۲۴) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ، $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ ، ... و $(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2})$ اکیداً صعودی می‌باشد، اما تابع

در هر بازه‌ای که شامل این مقادیر باشد، غیر یکنوا خواهد شد.

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{یا} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{و} \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad (25)$$

(۲۶) اگر مقدار $\sin x + \cos x$ یا $\sin x - \cos x$ را داشته باشیم، می‌توان مقدار $\sin 2x$ را یا به توان رساندن تساوی‌های داده‌شده به دست آورد هم‌چنین اگر مقدار $\cos 2x$ را بخواهیم به دست آوریم، باز هم ابتدا مقدار $\sin 2x$ را به دست می‌آوریم و سپس مقدار $\cos 2x$ را از

رابطه $\cos 2x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2x}$ مشخص می‌کنیم.

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (27)$$

۲۸) عبارت $1 + \sin 2x$ با عبارت $(\sin x + \cos x)^2$ و عبارت $1 - \sin 2x$ با عبارت $(\sin x - \cos x)^2$ برابر است.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad (۲۹)$$

۲۹) $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ را می‌توان با فرمول‌های زیر بر حسب $\cos 2x$ نوشت:

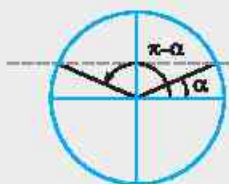
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (۳۰)$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \quad (۳۱)$$

۳۲) برای حل معادله $\sin x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

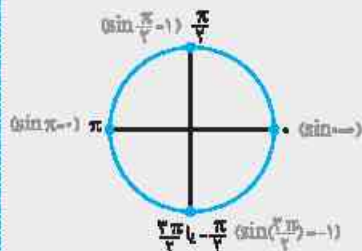


$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳۳) اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

۳۴) برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $\pm 1, \pm 2, \dots$ را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.



۳۵) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد:

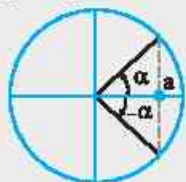
$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۳۶) برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$ استفاده می‌کنیم.

۳۷) برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

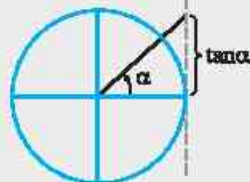
۳۸) جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

۳۹) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$
- ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

۴۰) برای حل معادله مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$ استفاده می‌کنیم.

۴۱) برای حل معادله $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۴۲) برای حل معادله $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$